Introducción

Vamos a realizar en este capítulo el estudio de un tipo de movimiento particularmente interesante: el de las partículas que oscilan en torno a una posición de equilibrio, como es el caso de los puntos materiales que forman una cuerda vibrante, o de un péndulo, o de un resorte.

Magnitudes de un movimiento oscilatorio

La observación de un movimiento vibratorio nos muestra que se trata de un movimiento periódico, es decir, que las posiciones, velocidades, etc., se repiten cada cierto tiempo. Por ello será necesario considerar el tiempo que tarda en producirse una oscilación completa que recibe el nombre de *periodo*, y que suele representarse por la letra *T*. Cuando los movimientos oscilatorios tengan un periodo muy corto, que es lo más frecuente, interesará manejar el número de oscilaciones que se producen en un segundo, que recibe el nombre de *frecuencia*, que representaremos por *f*, o mejor, por ν, y que guarda con el periodo la relación: $\nu=\frac{1}{T}$

La unidad internacional de frecuencia es la frecuencia de un oscilador que describe una oscilación (o ciclo) en un segundo. Se le da el nombre de ciclo por segundo o hertzio (símbolo c/s o Hz).

Otras magnitudes

Por otra parte, la posición de la partícula en cada instante podrá definirse mediante su distancia a un origen que puede ser el mismo punto de equilibrio. Esta distancia recibe el nombre de *elongación*, y se representa por *x*. La máxima distancia al origen es la *amplitud* de la oscilación, y la representaremos por *A*. La frecuencia angular ω, está relacionada con el periodo según:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

y, lógicamente, con la frecuencia:

$$\omega=2\pi\nu$$

y se mide en radianes por segundo (rad/s).

Existen numerosos tipos de movimientos oscilatorios, pero nos vamos a limitar al estudio del caso más sencillo, denominado *armónico simple (M.A.S.)*, cuyo interés radica en que cualquier movimiento oscilatorio puede considerarse como una aproximación del M.A.S. o como una superposición de varios.

Dinámica del M.A.S.

El movimiento armónico es el que describe un punto material bajo la acción de las fuerzas llamadas elásticas, y trataremos de obtener sus ecuaciones a partir de la consideración de estas fuerzas.

Fuerza elástica

La observación de las deformaciones producidas por una fuerza que actúa sobre un resorte muestra que a mayor fuerza corresponde mayor deformación. Ello permite emitir la hipótesis de que la fuerza aplicada es proporcional a la deformación, o, lo que es igual, que el resorte se opone a la deformación con una fuerza

$\boldsymbol{F}=-kx\boldsymbol{i}$ que recibe el nombre de fuerza recuperadora o fuerza elástica.

Definición de M.A.S.

La expresión anterior, denominada *ley de Hooke*, nos permite dar una definición operativa de movimiento oscilatorio armónico simple: *El movimiento oscilatorio será armónico cuando la fuerza que actúe sobre el móvil sea proporcional a su distancia a la posición de equilibrio (elongación) y dirigida en sentido contrario a ésta*.

Cinemática del M.A.S.

Una vez conocida la fuerza que actúa sobre un oscilador armónico es posible obtener las ecuaciones cinemáticas. En efecto, aplicando la ecuación fundamental de la dinámica, obtenemos la aceleración

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$$

que resulta ,como la fuerza, proporcional a la elongación y de sentido contrario a ésta.

Ecuación del movimiento

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular uniforme. Si observamos las proyecciones de la

Contenido

partícula sobre el eje OX, se mostrará como un movimiento de vaivén, similar a un M.A.S. Comenzaremos a contar el tiempo en el instante en que el oscilador se encuentra en su máxima elongación, (amplitud) con lo que el punto sobre la circunferencia estará en *P*. Al cabo de un tiempo *t*, el punto *P* se habrá desplazado a *P'*, habiendo descrito un ángulo ϑ, y el oscilador tendrá la elongación *x*.

El ángulo descrito en un tiempo *t* por el movimiento circular uniforme de rapidez ω será $\theta=\omega t$ puesto que $t_0 = 0$ y $\vartheta_0 = 0$. Y la elongación vendrá dada por $x = A \cos \vartheta$, es decir $x=A\cos\omega t$ Esta expresión representa la *ecuación del movimiento armónico simple, x = f(t)*. (El término armónico se aplica a las funciones seno y coseno).

Otras expresiones

Si se tiene en cuenta que la velocidad angular vendrá dada por $\omega=\frac{2\pi}{T}$ para un movimiento uniforme, y recordamos la relación entre el periodo y la frecuencia, podremos escribir la ecuación de diversas formas:

$$x=A\cos\omega t$$
$$x=A\cos\frac{2\pi}{T}t$$
$$x=A\cos 2\pi\nu t$$

Ahora podremos comprobar cómo la ecuación anterior concuerda con la definición de movimiento armónico simple.

Ecuaciones cinemáticas

$$x=A\cos\omega t$$
$$v=-A\omega\, sen\omega t$$
$$a=-A\omega^2\cos\omega t=-\omega^2 x$$

La constante ω^2 recibe el nombre de constante armónica, y está relacionada con la constante elástica *k*, por la ecuación:

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

Determinación del periodo de un M.A.S.

La determinación del periodo o de la frecuencia de un movimiento oscilatorio es uno de los problemas más frecuentes y del mayor interés en muchos casos desde el cálculo del periodo de un reloj de péndulo, hasta el cálculo de la frecuencia de oscilación de las cargas eléctricas que produce las ondas electromagnéticas.

En algunos casos podrá determinarse directamente el periodo, pero si la frecuencia de la oscilación es grande, como ocurre frecuentemente, se puede proceder a una determinación indirecta del periodo. Como la fuerza recuperadora actuante sobre un oscilador armónico cumple la ecuación $F = -kx$; la aceleración será, como ya vimos

$$a=-\frac{k}{m}x$$

y, por otra parte, la aceleración viene dada por

$$a=-\omega^2 x$$

de manera que podemos establecer la relación

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

que equivale a:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{k}{m}$$

de la que se obtiene

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

que proporciona el periodo de oscilación en función de la masa del oscilador y de la constante elástica.

Tratamiento energético del M.A.S.

El trabajo que realiza la fuerza recuperadora es, como sabemos:

$$W=\int_0^A F\cdot dx=\int_0^A -kx\cdot dx=$$
$$-\frac{1}{2}kx^2\Big]_0^A=-\frac{1}{2}kA^2$$

Recordando que el trabajo realizado por las fuerzas del campo es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo:

$$\Delta E_p=\frac{1}{2}kA^2$$

En general, para cualquier deformación *x*, le corresponderá al oscilador una energía potencial $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ y, dado que la energía total disponible es $E=\frac{1}{2}kA^2$ al liberar el oscilador, éste, bajo la fuerza recuperadora (que es una fuerza conservativa), adquirirá un movimiento oscilante, cumpliéndose en todo momento el principio de conservación de la energía a través de la conversión de energía potencial en cinética y a la inversa, de manera que tendremos:

$$E=E_c+E_p$$
$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

que permite relacionar la velocidad del oscilador con la elongación, a partir de la amplitud del movimiento y del valor de la constante recuperadora. Así, en el punto de máxima elongación *x = A*, la energía estará toda en forma potencial, siendo la velocidad nula, mientras que al pasar por el punto de equilibrio, *x = 0*, la energía estará toda en forma cinética, siendo máxima la velocidad.

Si no actuase ninguna fuerza de rozamiento, la oscilación proseguiría indefinidamente, pero en la práctica hay siempre una disipación más o menos rápida de energía mecánica, con lo que la oscilación va amortiguándose, disminuyendo la amplitud hasta llegar al reposo.